Chapitre 6

Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique

EPFL

- **Contrainte géométrique :** restriction du nombre de degrés de liberté du mouvement dû à la géométrie particulière du mouvement.

1. **Demi-sphère :** $r = \text{cste}$

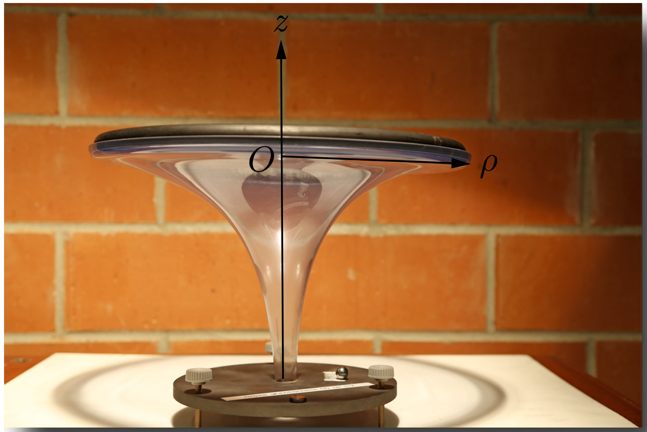
- **Contrainte :**

$$r = R = \text{cste} \tag{6.1}$$

- **Degrés de liberté :** 2

ϕ et θ

2. **Entonnoir :** $z = z\left(\rho\right)$



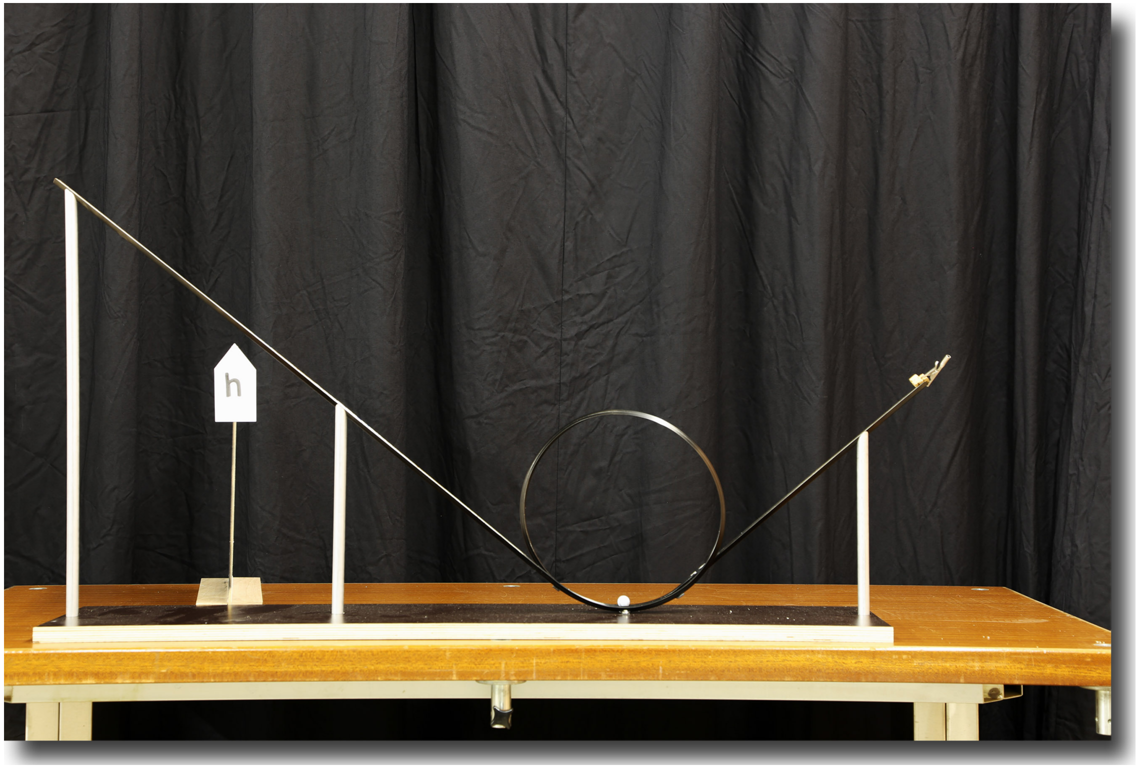
- **Contrainte :**

$$z = -\frac{1}{\rho} \tag{6.2}$$

- **Degrés de liberté :** 2

ρ et ϕ ou ϕ et z

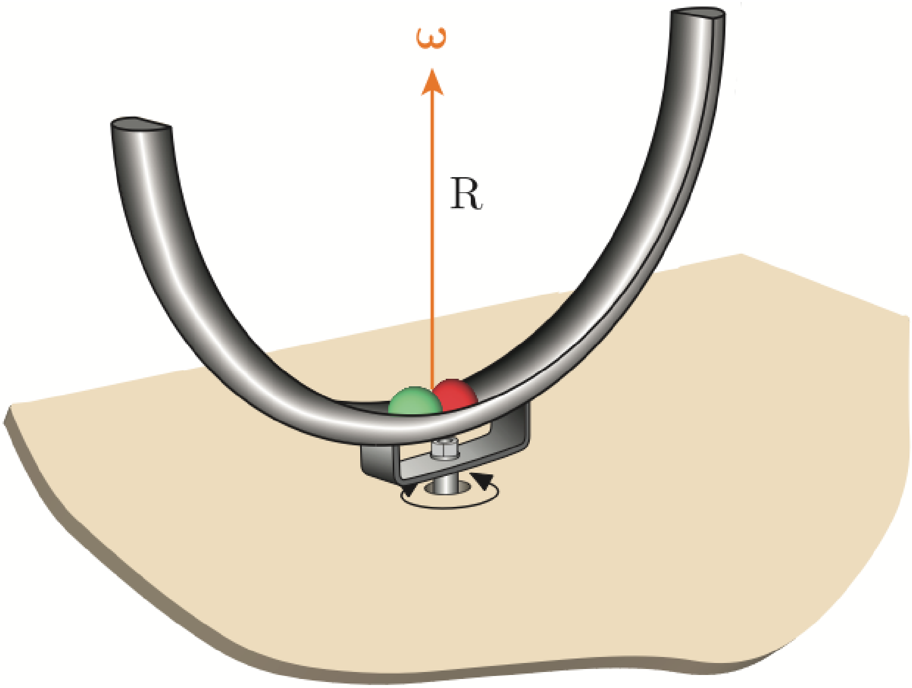
3 Bille sur un looping :

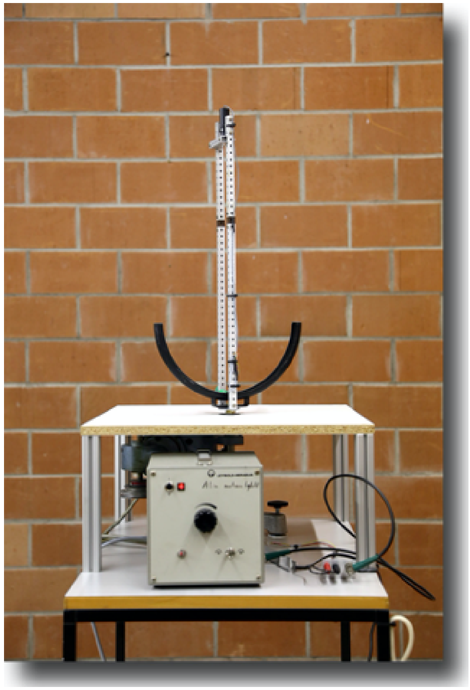


- **Contraintes :** angle d'inclinaison constant et rayon constant
- **Degré de liberté :** 1

  abscisse curviligne s

Bille dans un anneau :





- **Contraintes :** 2

  $$r = R = \text{cste} \quad \text{et} \quad \omega = \dot{\phi} = \text{cste}$$

- **Degré de liberté :** 1

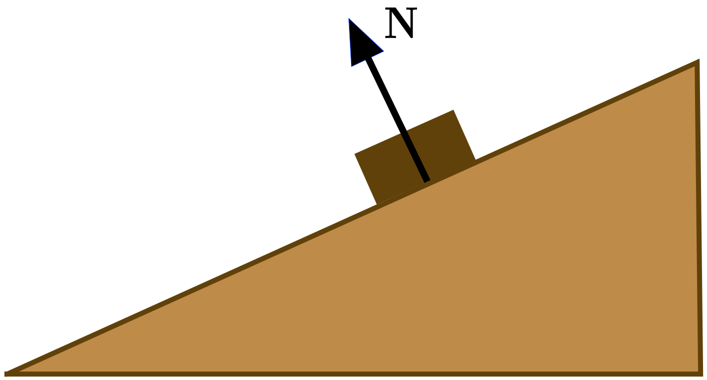
  angle nodal θ (plan de l'anneau)

- **Contrainte géométrique :** une contrainte géométrique est une restriction cinématique (condition mathématique) sur la position, la vitesse ou l'accélération du point matériel.

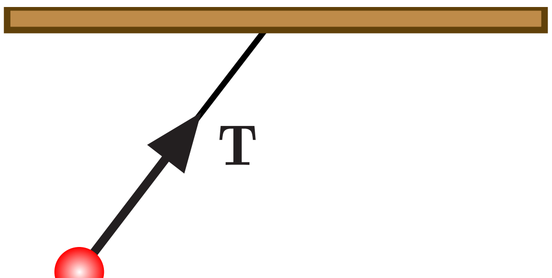
- **Force de contrainte :** une force de contrainte est une cause dynamique dont l'effet est une contrainte géométrique sur la loi du mouvement (2^e loi de Newton).

  1. **Réaction normale :** exercée par une surface (plane ou courbe)
  2. **Tension :** dans un fil

1. **Plan incliné :** réaction normale $\boldsymbol{N}$



2. **Fil :** tension $\boldsymbol{T}$



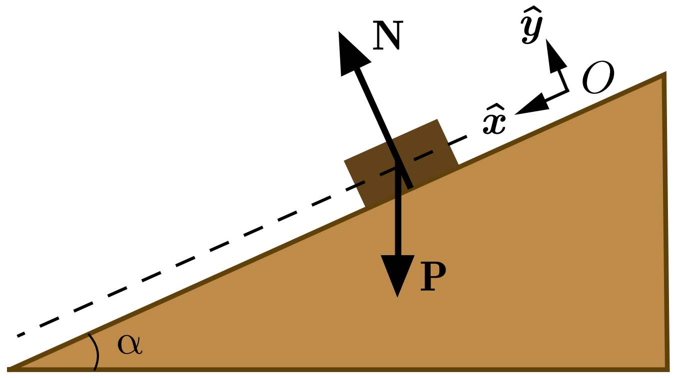
- **Contrainte géométrique :** mouvement parallèle au plan incliné

$$\dot{y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{y} = 0 \tag{6.3}$$

- **Accélération :** parallèle au plan incliné

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{6.4}$$

- **Forces extérieures :**



  1. **Poids :** (6.5)

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - mg\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

  2. **Force de réaction normale :**

$$\boldsymbol{N} = N\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.6}$$

- **Loi du mouvement :** $\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = m\,\boldsymbol{a}$ (6.7)

  1. selon $\hat{\boldsymbol{x}}$: $mg\sin\alpha = m\,\ddot{x}$
  2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$: $-mg\cos\alpha + N = 0$ (6.8)

6.1.1 Force de contrainte

1. **Force de réaction normale :** plan incliné

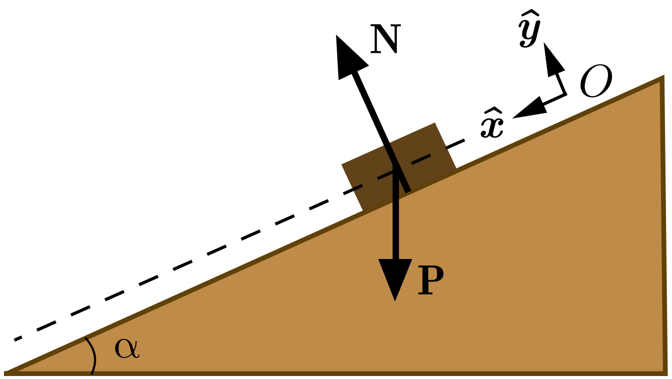
- **Loi du mouvement :** vectorielle

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = m\,\boldsymbol{a} \tag{6.7}$$

- **Equation du mouvement :** (6.9)

mouvement parallèle au plan (MRUA)

$$\ddot{x} = g \sin\alpha = \text{cste}$$



- **Equation de contrainte :**

force de réaction normale orthogonale au plan

$$N = mg\cos\alpha \tag{6.10}$$

- La force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ compense la composante du poids $\boldsymbol{P}$ qui est normale au plan pour assurer que le mouvement du bloc soit parallèle au plan incliné (contrainte géométrique), sinon il s'y enfoncerait.

- **Contraintes géométriques :**

  1. **Rayon constant :**

     $$r = R = \text{cste}$$

     $$\text{ainsi} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{r} = 0$$

  2. **Vitesse angulaire constante :**

     $$\omega = \dot{\phi} = \text{cste} \qquad \text{(anneau)}$$

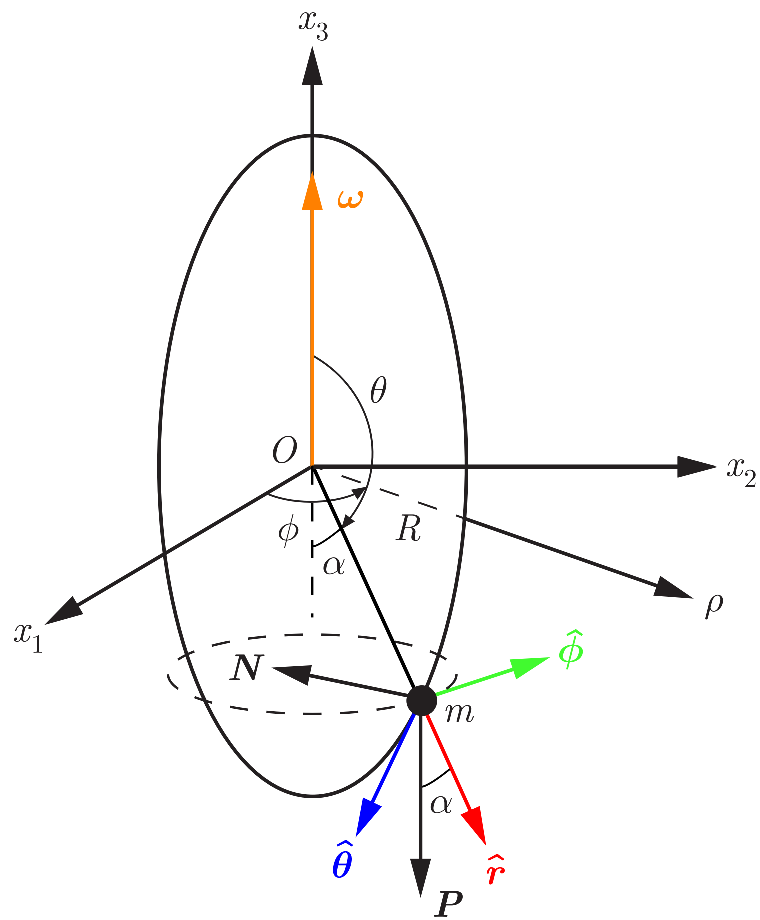
     $$\text{ainsi} \qquad \dot{\omega} = \ddot{\phi} = 0 \qquad (6.11)$$

- **Forces extérieures :** (6.14)

  1. **Poids :** $\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g}$

  2. **Réaction normale :**

     $$\boldsymbol{N} = N_r\,\hat{\boldsymbol{r}} + N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$$



La réaction normale $\boldsymbol{N}$ est orthogonale au mouvement non contraint selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ où le degré de liberté est l'angle θ.

- **Poids :** (6.14)

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\left(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

- **Piège :** projection

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \quad \text{ainsi} \quad \cos\theta < 0$$

- **Angles supplémentaires :** θ et α

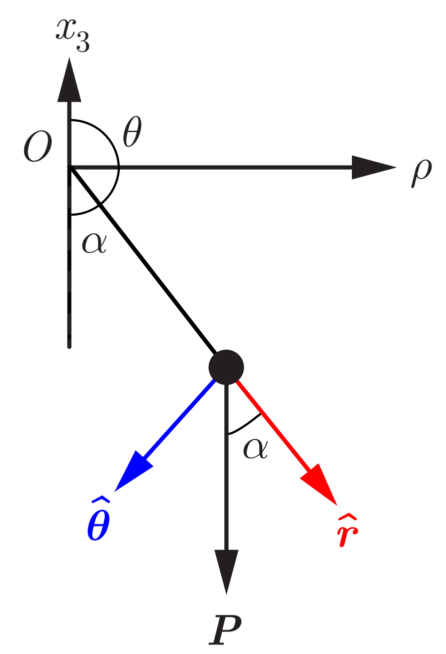
$$\alpha + \theta = \pi \tag{6.12}$$

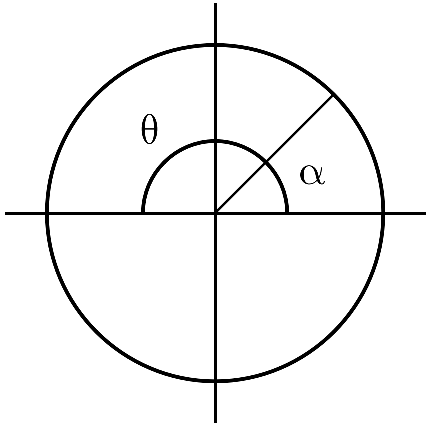
- **Identités :** cercle trigonométrique

  1. $\sin\alpha = \sin\theta$
  2. $\cos\alpha = -\cos\theta$ (6.13)

- **Poids :** (6.14)

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\left(-\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$





- **Loi du mouvement :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = m\,\boldsymbol{a} \tag{6.15}$$

- **Poids :**

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\left(-\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{6.14}$$

- **Réaction normale :**

$$\boldsymbol{N} = N_r\,\hat{\boldsymbol{r}} + N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.15}$$

- **Accélération :** coordonnées sphériques (5.20) et contraintes

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = &-R\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} + R\left(\ddot{\theta} - \,\omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ &+ 2R\,\omega\,\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{6.16}$$

- L'équation du mouvement et les équations de contraintes sont obtenues en substituant le poids $\boldsymbol{P}$, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ et l'accélération $\boldsymbol{a}$ dans la loi du mouvement (6.15) et en la projetant dans le repère sphérique.

- **Equation du mouvement et équations de contraintes :**

$$\begin{aligned} &\text{❶ selon } \hat{\boldsymbol{r}}: && -mg\cos\theta + N_r = -mR\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) \\ &\text{❷ selon } \hat{\boldsymbol{\theta}}: && mg\sin\theta = mR\left(\ddot{\theta} - \omega^2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &\text{❸ selon } \hat{\boldsymbol{\phi}}: && N_\phi = 2\,mR\,\omega\,\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \tag{6.17}$$

- **Réaction normale :** (6.17) selon $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ dans (6.14)

$$\boldsymbol{N} = m\left(g\cos\theta - R\,\dot{\theta}^2 - R\,\omega^2\sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} + 2\,mR\,\omega\,\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.18}$$

- **Equation du mouvement :** (6.17) selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\ddot{\theta} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0 \tag{6.19}$$

- La loi du mouvement permet de déterminer les composantes de la force de contrainte (réaction normale $\boldsymbol{N}$) par projection dans les directions où le mouvement est contraint.

- **Equation du mouvement :**

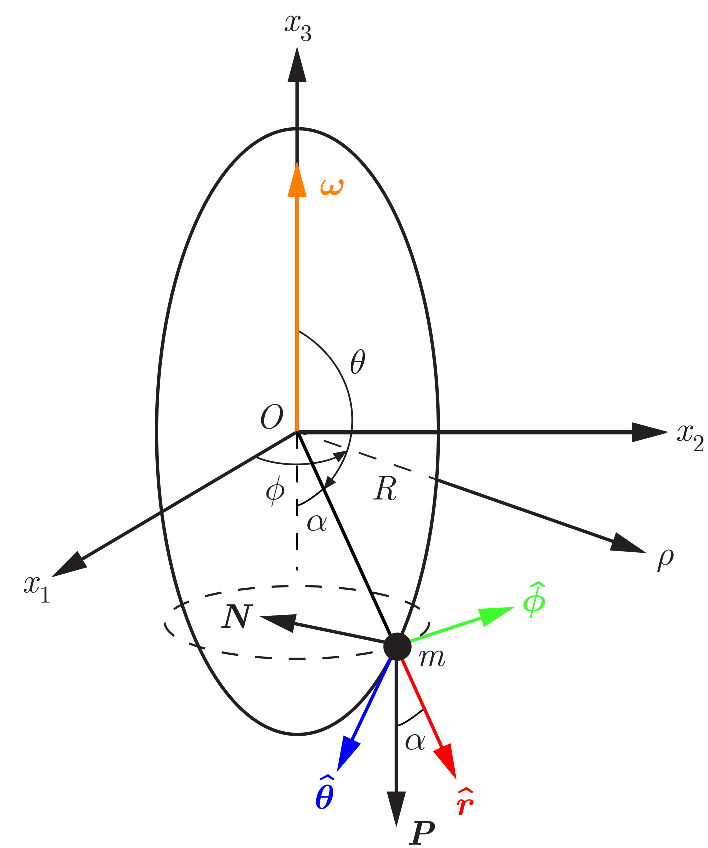
$$\ddot{\theta} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \cos\theta\right)\sin\theta = 0 \qquad (6.19)$$

- **Condition d'équilibre :** $\theta = \theta_0$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta}_0 = 0 \qquad (6.20)$$

- **Angles d'équilibre :** $\theta_0 \in \{\theta_1, \theta_2\}$

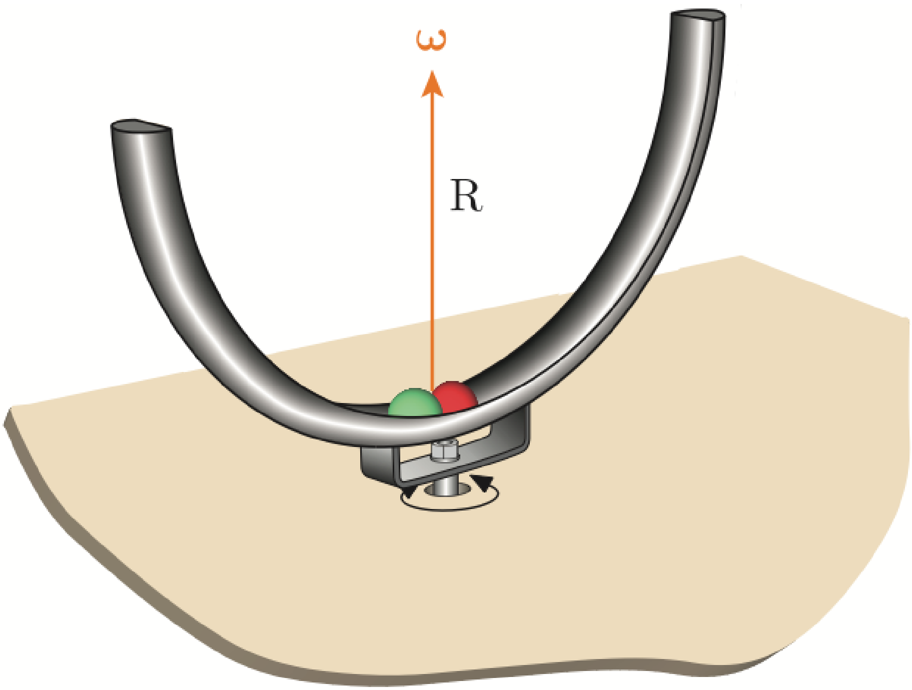
$$\sin\theta_0 \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \cos\theta_0\right) = 0 \qquad (6.21)$$

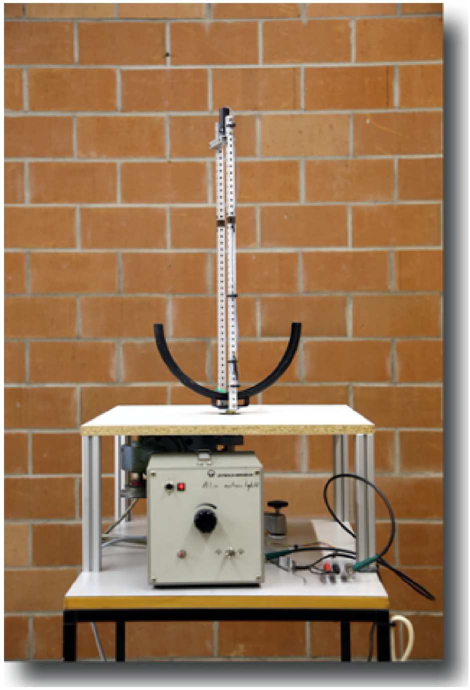


1. $\sin\theta_1 = 0 \quad \text{ainsi} \quad \theta_1 = \pi$
2. $\cos\theta_2 = -\dfrac{g}{R\,\omega^2} \quad \text{ainsi} \quad \theta_2 = \arccos\left(-\dfrac{g}{R\omega^2}\right) \qquad (6.22)$

   $\text{si} \quad R\,\omega^2 \geqslant g \quad \text{car} \quad -1 \leqslant \cos\theta_2 < 0$

- Pour que l'angle d'équilibre θ_2 existe, il faut que $\omega \geqslant \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.





- Une bille glisse dans un anneau de rayon R en rotation à vitesse angulaire ω constante.

  1. Si la vitesse angulaire $\omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$, la bille reste au bas de l'anneau.

  2. Si la vitesse angulaire $\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{R}}$, la bille oscille autour d'une autre position équilibre.

- **Propriétés :**

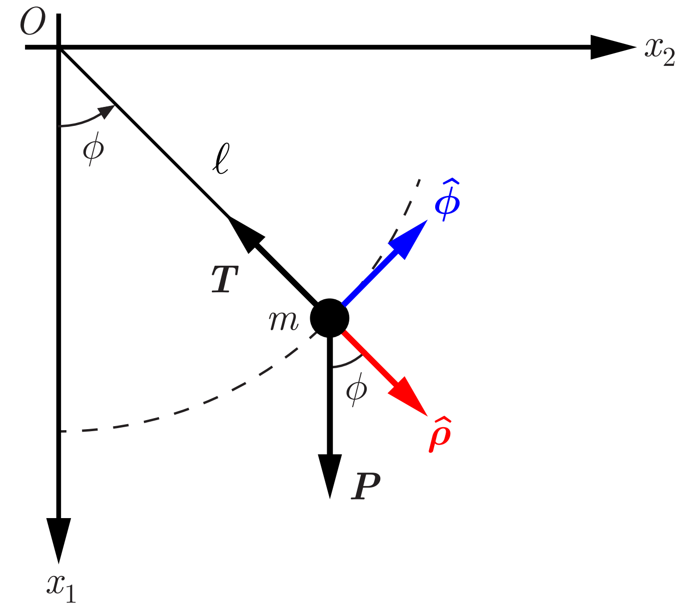
  1. **Fil inextensible de masse négligeable :** point matériel sans élasticité du fil
  2. **Frottements négligeables :** sans amortissement
  3. **Mouvement dans un plan vertical fixe :** référentiel d'inertie de la terre

- **Description mathématique :** coordonnées polaires ρ et ϕ par rapport au référentiel d'inertie de la terre

- **Contrainte géométrique :** longueur du fil ℓ constante par rapport au point d'attache O

$$\rho = \ell = \text{cste} \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\rho} = 0 \qquad (6.23)$$

- **Forces extérieures :**
  1. **Poids :**
$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g} = mg\,\left(\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$
  2. **Tension :**
$$\boldsymbol{T} = -T\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{6.24}$$



- **Loi du mouvement :**
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} = m\,\boldsymbol{a} \tag{6.25}$$

- **Accélération :** coordonnées polaires et contraintes
$$\boldsymbol{a} = -\,\ell\,\dot{\phi}^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \ell\,\ddot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{6.26}$$

- **Equation du mouvement et équation de contrainte :**
  1. selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$: $\quad mg\cos\phi - T = -\,m\ell\,\dot{\phi}^2$ (6.27)
  2. selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: $\quad -\,mg\sin\phi = m\ell\,\ddot{\phi}$

- **Tension dans le fil :** (6.27) selon $\hat{\boldsymbol{\rho}}$

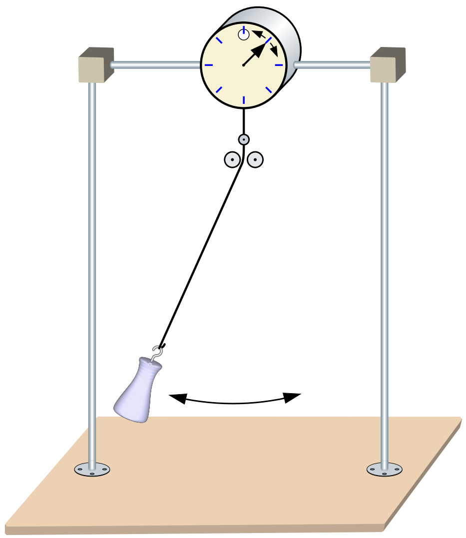
$$T = m\left(g\cos\phi + \ell\,\dot{\phi}^2\right) \tag{6.28}$$

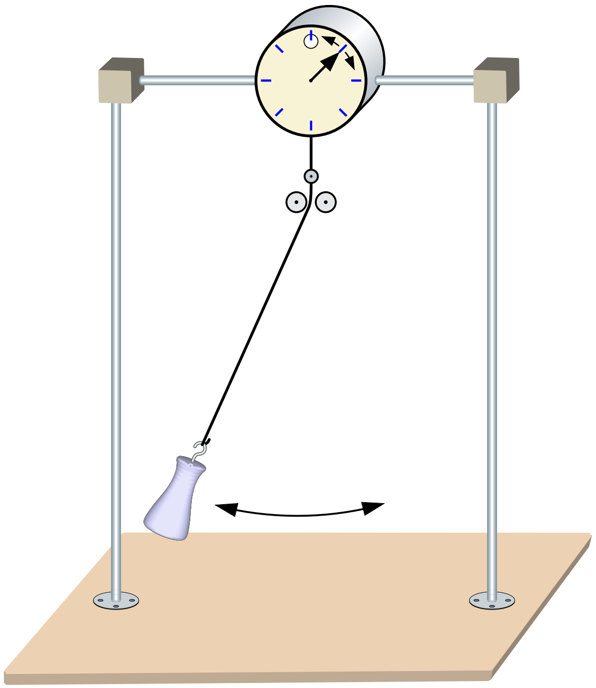
Lorsque le point matériel a un mouvement d'oscillation, la valeur de la tension T dans le fil augmente. Elle est plus grande en norme à la verticale en mouvement qu'à l'équilibre.

- **Equation du mouvement :** (6.27) selon $\hat{\boldsymbol{\phi}}$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\sin\phi = 0 \tag{6.29}$$

Le mouvement est indépendant de la masse m du point matériel.





- Une masse M est attachée à un fil inextensible de longueur ℓ de masse négligeable. La norme de la tension T est mesurée à l'aide d'un dynamomètre fixé au point d'attache.

- On observe que la tension est supérieure lorsque le pendule en mouvement passe par la position verticale que lorsqu'il est à l'équilibre. Cela s'explique par le fait que dans le référentiel en rotation du pendule, la tension compense la composante radiale du poids et la force centrifuge (chapitre 10).

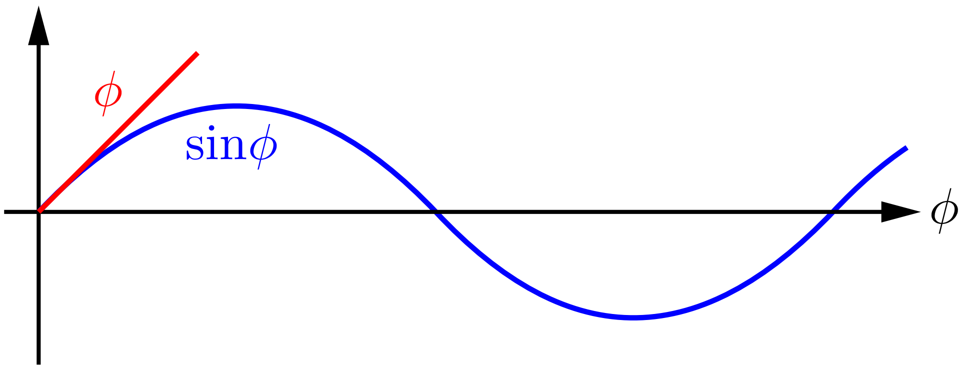
- **Equation du mouvement :** sans approximation

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\sin\phi = 0 \tag{6.29}$$

- **Angle d'équilibre :**

pendule vertical $\sin\phi_0 = 0$

$$\phi_0 = 0 \tag{6.30}$$



- **Petites oscillations :** $\phi \ll 1$

$$\sin\phi \simeq \phi \tag{6.31}$$

- **Développement limité :** $\sin\phi$ au $1^{\,\text{er}}$ ordre en ϕ autour de $\phi_0 = 0$

$$\sin\phi \simeq \sin(0) + \frac{d\sin\phi}{d\phi}(0)\,\phi = \sin(0) + \cos(0)\,\phi = \phi \tag{6.32}$$

- **Equation du mouvement :** approximation des petites oscillations

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\phi = 0 \tag{6.33}$$

- **Equation du mouvement :** approximation des petites oscillations

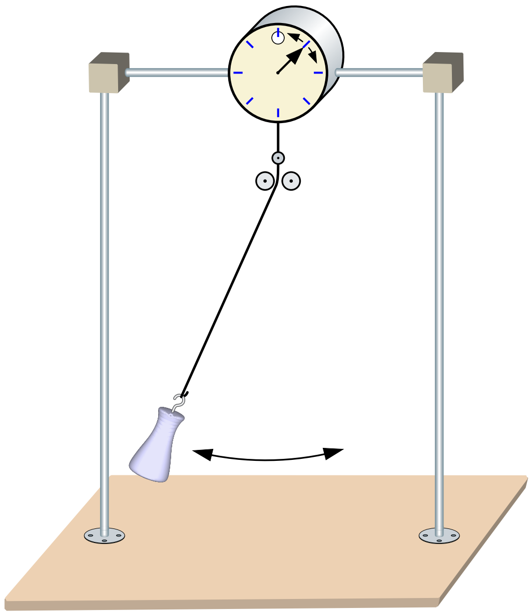
$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\phi = 0 \qquad (6.33)$$

- **Mouvement harmonique oscillatoire :** angulaire

$$\ddot{\phi} + \omega^2\,\phi = 0 \qquad (6.34)$$

- **Pulsation et période :** oscillation

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \text{ainsi} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \qquad (6.35)$$



- **Abscisse curviligne :**

$$s = \ell\,\phi \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{s} = \ell\,\ddot{\phi} \qquad (6.36)$$

- **Mouvement harmonique oscillatoire :** curviligne

$$\ddot{s} + \omega^2\,s = 0 \qquad (6.37)$$

- **Equation du mouvement :** générale

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\sin\phi = 0 \tag{6.33}$$

- **Astuce :** équation du mouvement multipliée par $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}\,\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,\dot{\phi} = 0 \tag{6.38}$$

- **Equation différentielle :** (6.38) multipliée par dt

$$\dot{\phi}\,d\dot{\phi} + \frac{g}{\ell}\,\sin\phi\,d\phi = 0 \qquad \text{où} \qquad d\dot{\phi} = \ddot{\phi}\,dt \quad \text{et} \quad d\phi = \dot{\phi}\,dt \tag{6.39}$$

- **Conditions initiales :** angle et vitesse angulaire

$$\phi\,(0) = \phi_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\phi}\,(0) = 0 \tag{6.40}$$

- **Intégration :** (6.40) par rapport au temps implicitement

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}'\,d\dot{\phi}' + \frac{g}{\ell}\int_{\phi_0}^{\phi} \sin\phi'\,d\phi' = 0 \tag{6.41}$$

- **Intégration :**

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}'\, d\dot{\phi}' + \frac{g}{\ell} \int_{\phi_0}^{\phi} \sin\phi'\, d\phi' = 0 \tag{6.41}$$

- **Intégrale du mouvement :**

$$\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \frac{g}{\ell}\left(\cos\phi - \cos\phi_0\right) = 0 \tag{6.42}$$

- **Vitesse angulaire :**

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0} \tag{6.43}$$

- **Intervalle de temps infinitésimal :**

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} \tag{6.44}$$

- **Intervalle de temps infinitésimal :**

$$dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}} \tag{6.44}$$

- **Temps :** intégrale elliptique

$$t = \int_0^t dt' = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\phi_0}^{\phi(t)}\frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} \tag{6.45}$$

Initialement, la position angulaire du pendule est ϕ_0 et au bout d'un quart de période d'oscillation, le pendule se trouve à la verticale en $\phi = 0$. La période d'oscillation T est la somme de quatre quarts de période identiques.

- **Période :** oscillation

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\phi_0}^{0}\frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} \tag{6.46}$$

- **Période :** oscillation

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_{\phi_0}^{0}\frac{d\phi'}{\sqrt{\cos\phi' - \cos\phi_0}} \tag{6.46}$$

La résolution de cette intégrale elliptique fait notamment intervenir les polynômes de Legendre.

- **Période exacte :** fonction paire de ϕ_0 par symétrie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{\left(2^n\,n!\right)^2}\right)^2\sin^{2n}\left(\frac{\phi_0}{2}\right)\right] \tag{6.47}$$

- **Période approximée :** développement limité en ϕ_0

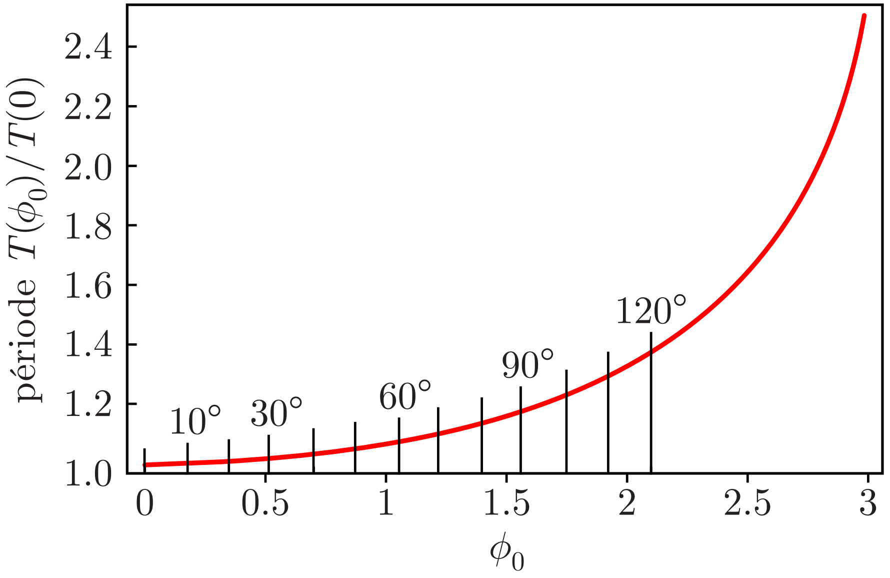
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\,\phi_0^2 + \frac{11}{3072}\,\phi_0^4 + \mathcal{O}\left(6\right)\right) \tag{6.48}$$

- **Période approximée :** petites oscillations $\phi_0 \ll 1$

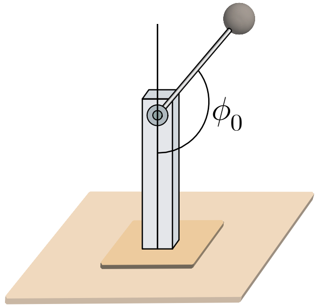
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \mathcal{O}\left(2\right)\right) \qquad (6.49)$$

Table – Termes correctifs

ϕ_0	$\frac{1}{16}\,\phi_0^2$	$\frac{11}{3072}\,\phi_0^4$
10°	$0.19\,\%$	$0.003\,\%$
20°	$0.76\,\%$	$0.005\,\%$
30°	$1.7\,\%$	$0.027\,\%$
60°	$6.9\,\%$	$0.43\,\%$
90°	$15\,\%$	$2.2\,\%$
120°	$27\,\%$	$6.9\,\%$



- On constate numériquement que l'approximation des petites oscillations est bonne environ pour un angle initial $\phi_0 < 20^\circ$.



- **Intégrale du mouvement :** le travail $W_{1\to 2}\left(\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}\right)$ d'une force extérieure $\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}$ et l'énergie cinétique T sont des grandeurs extensives obtenues en intégrant la loi du mouvement.

- **Loi du mouvement :** produit scalaire avec le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot \boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \tag{6.50}$$

- **Equation différentielle :** (6.50) multipliée par dt

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r} = m\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} \qquad \text{où} \qquad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt \quad \text{et} \quad d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,dt \tag{6.51}$$

- **Intégration :** (6.51) le long du chemin $\mathcal{C}_{1\to 2}$ de $\boldsymbol{r}_1$ à $\boldsymbol{r}_2$

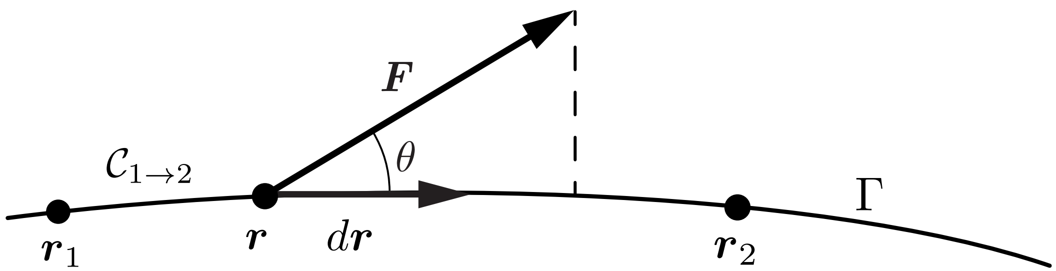
$$\int_{\mathcal{C}_{1\to 2}} \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r} = m \int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} \tag{6.52}$$

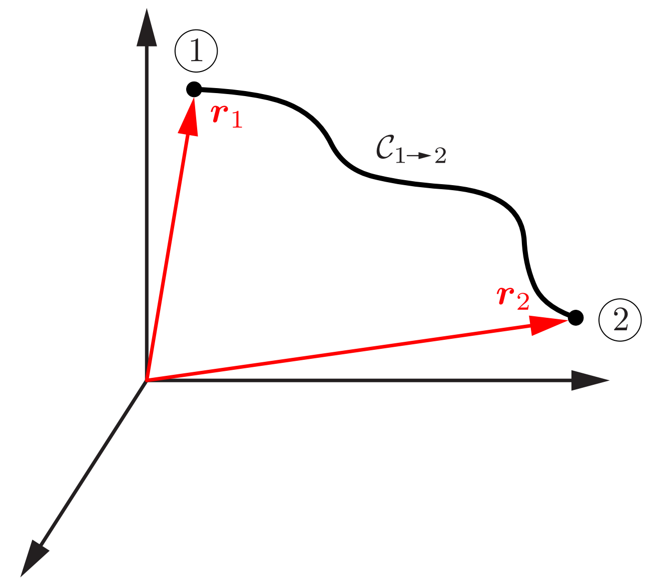
- **Intégrale du mouvement :** (6.30)

$$\sum \int_{\mathcal{C}_{1\to 2}} \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}^2 \bigg|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2} = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_1^2 \tag{6.53}$$

- **Travail infinitésimal :** $\delta W(\boldsymbol{F})$ d'une force $\boldsymbol{F}$ est une grandeur extensive obtenue par produit scalaire de la force $\boldsymbol{F}$ et du déplacement infinitésimal $d\boldsymbol{r}$.

$$\begin{aligned} \delta W(\boldsymbol{F}) &= \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \|\boldsymbol{F}\| \, \|d\boldsymbol{r}\| \, \cos\theta \end{aligned} \tag{6.54}$$





- **Travail :** intégrale du travail infinitésimal $\delta W(\boldsymbol{F})$ le long du chemin $\mathcal{C}_{1\rightarrow 2}$ sur la trajectoire Γ (6.55)

$$W_{1\rightarrow 2}(\boldsymbol{F}) = \int_{\mathcal{C}_{1\rightarrow 2}} \delta W(\boldsymbol{F}) = \int_{\mathcal{C}_{1\rightarrow 2}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

- **Unité (SI) :** Joule

$$[\,\mathrm{J}\,] = [\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,]$$

- **Energie cinétique infinitésimale :** grandeur scalaire et extensive associée à tout mouvement de vitesse $\boldsymbol{v}$ d'un point matériel de masse m.

$$dT = \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} \qquad (6.56)$$

James Joule
1818 – 1889

- **Energie cinétique :** (6.57)

$$T = \int_0^T dT' = m \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}' \cdot d\boldsymbol{v}' = \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}^2$$

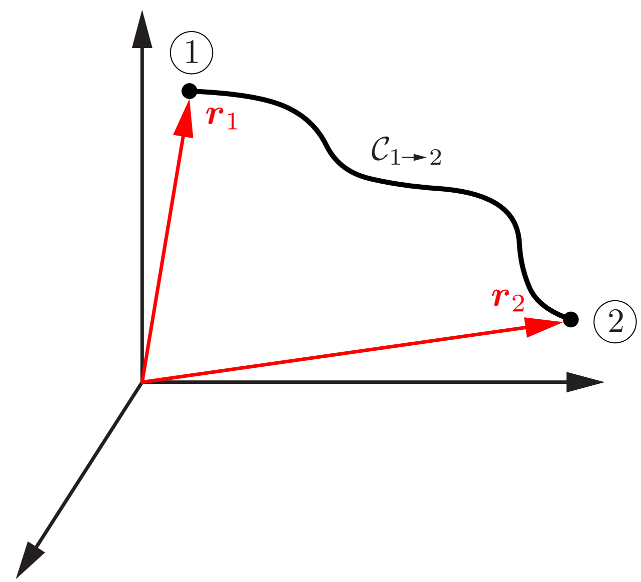
- **Propriétés :**
  1. Grandeur scalaire indépendante de l'orientation du mouvement
  2. Grandeur définie à une constante près : Choix de jauge

     $$T = 0 \quad \text{si} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

  3. Existence d'un minimum

- **Unité (SI) :** Joule

$$[\,\mathrm{J}\,] = \left[\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,\right]$$



- **Travail :** force extérieure $\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}$ le long du chemin $\mathcal{C}_{1\to2}$

$$W_{1\to2}\left(\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}\right) = \int_{\mathcal{C}_{1\to2}} \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad (6.55)$$

- **Variation d'énergie cinétique :** $\boldsymbol{r}_1$ à $\boldsymbol{r}_2$

$$\Delta T_{1\to2} = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_1^2 \qquad (6.59)$$

- **Intégrale du mouvement :**

$$\sum \int_{\mathcal{C}_{1\to2}} \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_1^2 \qquad (6.53)$$

- **Théorème de l'énergie cinétique :** (6.55) et (6.59) dans (6.53)

$$\boxed{\sum W_{1\to2}\left(\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}}\right) = \Delta T_{1\to2} \qquad (6.60)}$$

- **Puissance :** grandeur scalaire et extensive associée à la capacité d'une force $\boldsymbol{F}$ d'accélérer (ou de freiner) un mouvement de vitesse $\boldsymbol{v}$

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{F}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, \cos\theta \tag{6.61}$$

James Watt
1736 – 1819

1. Si $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ alors $P > 0$ (accélération)

   Moteur ou muscle

2. Si $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ alors $P < 0$ (freinage)

   Force de frottement

3. Si $\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ alors $P = 0$

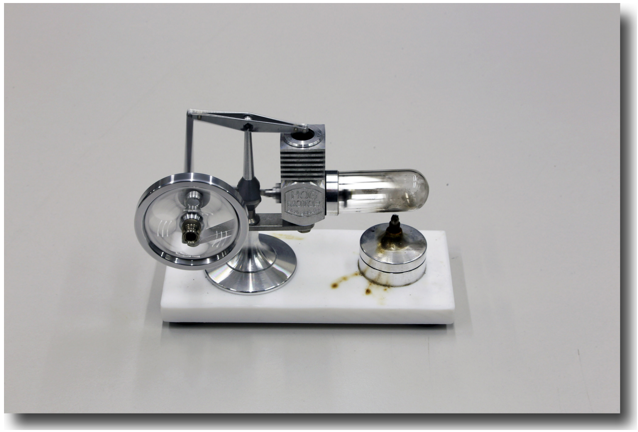
   Force de contrainte orthogonale au mouvement

- **Unité (SI) :** Watt

$$[\,\mathrm{W}\,] = [\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}\,]$$

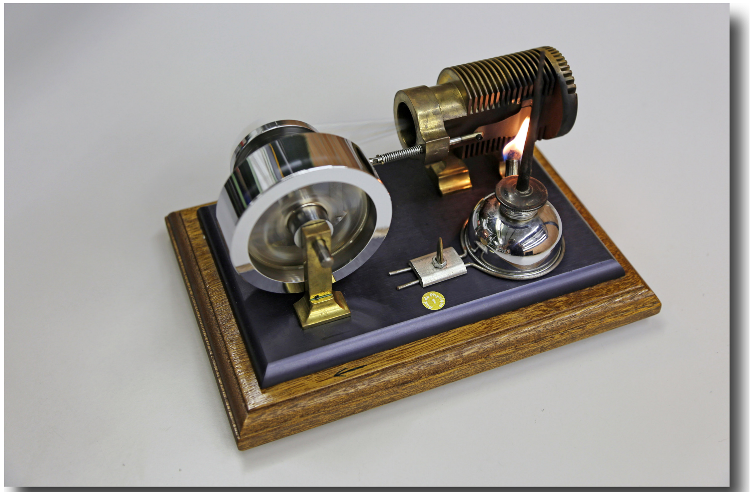
- **Travail et puissance :** le travail est l'intégrale temporelle de la puissance

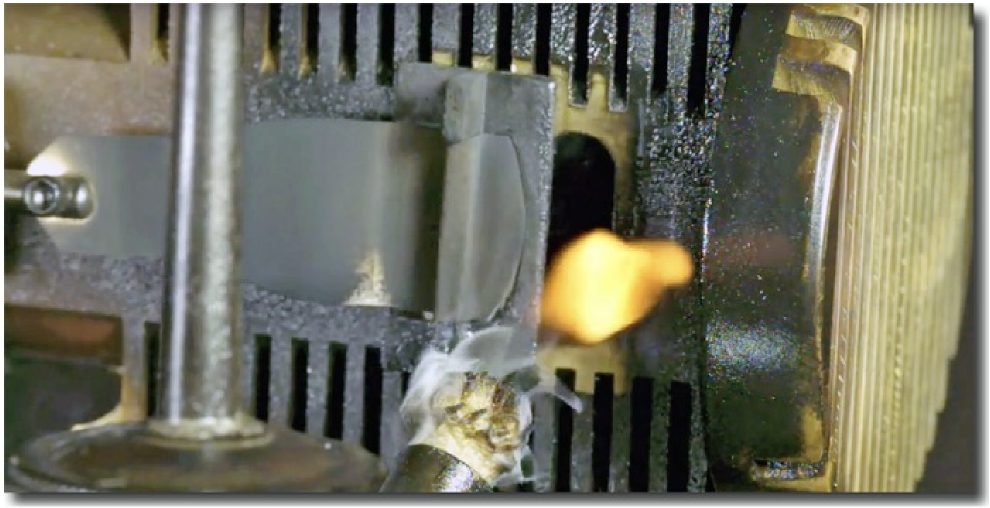
$$W_{1\rightarrow 2}(\boldsymbol{F}) = \int_{\mathcal{C}_{1\rightarrow 2}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt \tag{6.62}$$



1. Un brûleur rempli d'alcool à brûler échauffe l'air à l'intérieur d'un cylindre, fournissant ainsi de la chaleur au moteur qui est activé par le lancement de la roue.

2. Une lampe qui se situe au foyer gauche d'un système de miroirs paraboliques éclaire et chauffe un corps noir qui se trouve au foyer droite. La différence de température de part et d'autre de la roue à droite entraîne son mouvement.





- Le moteur à dépression est un moteur à air chaud qui aspire une flamme. Lorsque le clapet s'ouvre, l'air chaud s'engouffre dans le cylindre et il est refroidi par les parois du cylindre. Ce refoidissement provoque une contraction de l'air ce qui fait chuter la pression dans le cylindre. Cette dépression aspire le piston avec un bruit de succion caractéristique. Le déplacement du piston provoque le mouvement de la bielle ce qui entraîne la rotation de la roue.

- Le moteur à dépression effectue un travail en faisant tourner la roue. Ce moteur convertit une puissance thermique en puissance mécanique.

Table – Unités physiques des grandeurs mécaniques principales (SI)

Grandeur	Unité (SI)	Abréviation
Masse	kilogramme	$[\,\mathrm{kg}\,]$
Longueur	mètre	$[\,\mathrm{m}\,]$
Temps	seconde	$[\,\mathrm{s}\,]$
Vitesse		$[\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]$
Accélération		$[\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,]$
Force	Newton	$[\,\mathrm{N}\,] = [\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}\,]$
Travail, énergie	Joule	$[\,\mathrm{J}\,] = [\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,]$
Puissance	Watt	$[\,\mathrm{W}\,] = [\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}\,]$

- **Analyse dimensionnelle :** vérifier l'homogénéité de la dimension physique des sommes ou différences de termes d'une équation.